احسان یارمحمدی

مغالطه‌های ریاضی

مقدمه

مغالِطه، استدلالی است که از نظر علم منطق به یکی از دلایل: «دست کم یکی از مقدمات گزاره نادرست باشد یا مقدمات گزاره، متضمن نتیجهٔ گزاره نباشد»، نادرست است. مغالطه، جزئی از برهان است که به‌طور قابل اثباتی در منطق آن ایراد وجود دارد و بنابراین کل برهان را نامعتبر می‌سازد. مغالطه‌گر کسی است که از روی استدلال نادرست به یک نتیجهٔ درست یا نادرست می‌رسد و ممکن است آن نتیجه را برای نتیجه‌گیری‌های دیگری هم به‌کار گیرد. موضوع مُغالِطه در ریاضی نیز دربارهٔ استدلال‌های نادرست یا اشتباه‌آمیز در ریاضیات است که به نتایج و دستاوردهای نادرست ریاضی منجر می‌شود.

برای آشنایی بیشتر شما ریاضی‌آموزان، دو نمونه از هندسه در پی می‌آید. ایراد استدلال اول را توضیح داده‌ایم و دومی را به شما واگذار می‌کنیم.

مغالطهٔ ۱. هر مثلث، متساوی‌الساقین است.

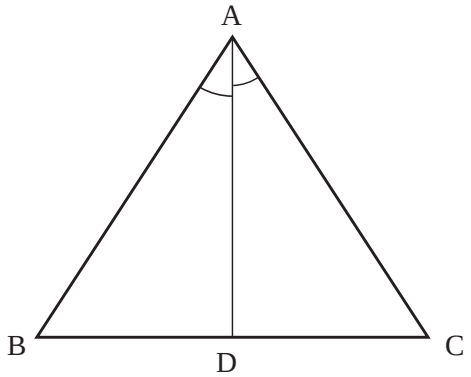
فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱) مثلثی مفروض باشد. مطلوب، اثبات این مطلب است که AB لزوماً برابر AC است.

اگر نیم‌ساز درونی زاویهٔ A با BC در D متلاقی شود، آن‌گاه بنا به قضیهٔ نیم‌ساز زاویه داریم: $\frac{DB}{AB}=\frac{DC}{AC}$

اما: $\angle ADB=\angle ACD+\angle CAD=\angle C+\frac{1}{2}\angle A$

بنابراین، نظر به قاعدهٔ سینوس‌ها در مورد مثلث ADB داریم:

$$\frac{DB}{AB}=\frac{\sin BAD}{\sin ADB}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin(C+\frac{1}{2}A)}$$



شکل ۱

گذشته از این:

$$\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$$

بنابراین:

$$\frac{DC}{AC}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin(B+\frac{1}{2}A)}$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin(C+\frac{1}{2}A)}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin(B+\frac{1}{2}A)}$$

علاوه بر این، $\sin\frac{1}{2}A$ صفر نیست، زیرا زاویهٔ A صفر نیست و در نتیجه:

$$\sin(C+\frac{1}{2}A)=\sin(B+\frac{1}{2}A)$$

$$\Rightarrow C+\frac{1}{2}A=B+\frac{1}{2}A\Rightarrow C=B$$

بنابراین، مثلث مورد بحث، متساوی‌الساقین است.

از تحلیل این مغالطه می‌توان برای توضیح جنبه‌های متعارفی استفاده کرد که غالباً در این‌گونه موارد با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم. البته برای شروع کار، باید خطای واقعی را بررسی و مشخص کنیم (مرحلهٔ خطا در این مورد از $\sin(C+\frac{1}{2}A)=\sin(B+\frac{1}{2}A)$ نتیجه شده است: زیرا تساوی سینوس‌ها ضرورتاً تساوی زاویه‌ها نیست). اما این موضوع در یک مغالطهٔ درست و حسابی، تنها بخش کوچکی از جاذبه‌های آن را تشکیل می‌دهد. مرحلهٔ دوم به‌دست آوردن گزارهٔ سازگاری است که در آن: استنتاج صحیح، به‌جای

مورد غلط، قـرار گرفته و در صورت امکان، تفاوت بین قضیه‌های غلط و صحیح به‌طور کامل توضیح داده شده است.

به‌این ترتیب مرحلهٔ: $\sin(C+\frac{1}{2}A)=\sin(B+\frac{1}{2}A)$

نه‌تنهـا به نتیجهٔ بیان شـده $(C+\frac{1}{2}A=B+\frac{1}{2}A)$،

بلکه به مورد دیگر:

$$C+\frac{1}{2}A=180^\circ-(B+\frac{1}{2}A)$$

$$\Rightarrow A+B+C=180^\circ$$

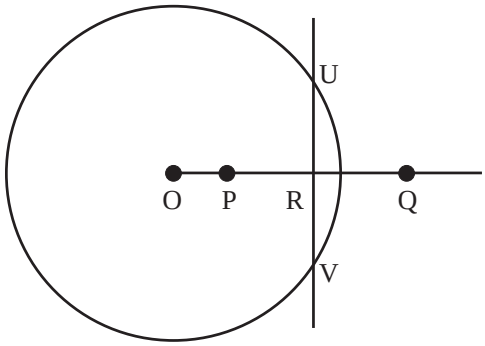
نیز می‌انجامد.

ضرورت تساوی زاویه‌های B و C از این واقعیت نقض می‌شـود که مجموع زاویه‌های A، B و C همواره 180° اسـت. به این ترتیب، خطای استدلال به‌دست می‌آید و صورت صحیح جایگزین می‌شود.

مغالطهٔ ۲. هر نقطهٔ داخـل دایره بر پیرامون آن قرار دارد.

دایـره‌ای به مرکز O و به شـعاع r، و نقطهٔ دلخواه P داخل آن (شکل ۲) در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که نقطهٔ P بر پیرامون دایره قرار دارد.

ترسـیم: فرض می‌کنیم Q نقطـه‌ای بر امتداد OP از طـرف P چنان باشـد کـه: $OP\times OQ=r^2$. و فرض می‌کنیم عمود منصف PQ دایره را در U و V قطع کند. نقطهٔ وسط PQ را با R نمایش می‌دهیم.



شکل ۲

اثبات:

$$\begin{cases} OP=OR-RP \\ OQ=OR+RQ \end{cases} \xRightarrow{RQ=RP} OQ=OR+RP$$

بنابراین:

$$OP\times OQ=(OR-RP)\times(OR+RP)$$

$$=(OR)^2-(RP)^2 \xRightarrow{\text{بنابر قضیه فیثاغورس}} OP\times OQ$$

$$=((OU)^2-(RU)^2)-((PU)^2-(RU)^2)$$

$$=(OU)^2-(PU)^2 \xRightarrow{OP\times OQ=r^2=(OU)^2} OP\times OQ$$

$$=OP\times OQ-(PU)^2 \Rightarrow (PU)^2=0 \Rightarrow PU=0$$

در نتیجه P در U، واقع بر پیرامون دایره است.

مغالطه از کجا است؟!

منبع

کتاب مغالطه‌های ریاضی،
مؤلف: ادوین آرتور ماکسِول،
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور،
ناشر: محراب‌قلم (چاپ اول: ۱۳۸۰)

پرسش‌های پیکارجو!

چند عدد اول مانند P وجود دارد به قسـمی کـه $P^{P+1}+2$ عددی اول باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) صفر هـ) بی‌شمار